Aflevering 7 Løsning

Opgave 1

Ligningssystem

$$2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1$$
$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 2$$
$$-3x_1 + 10x_2 - 6x_3 - 7x_4 = -4$$

(a) Koefficient matricen

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \\ -3 & 10 & -6 & -7 \end{bmatrix}}$$

(b) Beskriv hvert skridt

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ -3 & 10 & -6 & -7 & -4 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\boxed{r_1 \leftrightarrow r_2}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ -3 & 10 & -6 & -7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\boxed{r_3 \to r_3 + 3r_1}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\boxed{r_2 \leftrightarrow r_3}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\boxed{r_3 \to r_3 - 2r_2}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & -12 & -3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\boxed{r_3 \to \frac{-1}{9} r_3}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

RREF

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{lign 1} \\ \text{lign 2} \\ \text{lign 3} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{array}$$

(c) Giv generel løsning

x_1, x_2, x_3 bundne (pivotsøjler)

x_4 fri

$$x_1 - \frac{1}{3}x_4 = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 + \frac{4}{3}x_4 = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= \frac{1}{3} - \frac{4}{3}x_4 \\ x_4 &= x_4 \end{aligned}}$$

(d) Parameterfremstilling af løsning

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Opgave 2

Ligningssystem

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 9x_4 = 8 \\ -x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = -8 \end{cases}$$

(a) Skriv som vektorligning

$$\boxed{x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix}}$$

(b) Skriv som matrix ligning

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -9 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix}}$$

RREF er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(C) TRUE or FALSE

- Systemet er konsistent $\boxed{\text{TRUE}}$

  Da der i RREF ikke er nogen række af formen $[0\ 0 \cdots 0\ b]$ med $b \neq 0$

- Der er en unik løsning $\boxed{\text{FALSE}}$

  Da x_4 er en fri variabel i det der ikke er en pivot i fjerde søjle

- $\text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\4\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-9\\3\\5\end{bmatrix}\right\} = \mathbb{R}^3$ $\boxed{\text{TRUE}}$

  Søjlerne i A udspænder $\mathbb{R}^3$ da der er en pivot i hver række af rref(A)

- $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\4\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-9\\3\\5\end{bmatrix}\right\}$ er lineært uafhængig $\boxed{\text{FALSE}}$

  Da der er flere vektorer end indgange i hver vektor. Fra RREF kan aflæses at

$$\underbrace{\begin{bmatrix}-9\\3\\5\end{bmatrix}}_{\bar{a}_4} = \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}}_{\bar{a}_1} + 5 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}}_{\bar{a}_2} + 2 \underbrace{\begin{bmatrix}0\\4\\1\end{bmatrix}}_{\bar{a}_3}$$

- Løsningsmængden til ligningssystemet er en linje i $\mathbb{R}^3$ $\boxed{\text{FALSE}}$

Da løsninger vil have fire indgange $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$

- $\begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{TRUE}}$

Kan afløses fra RREF

Opgave 3

Er vektorene lineært uafhængige?

A $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$

$\boxed{\text{Lineært afhængig}}$, da der er flere vektorer end indgange i hver vektor

B $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$\boxed{\text{Lineært afhængig}}$, da mængden indeholder nulvektoren

C $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ $\boxed{\text{Lineært afhængig}}$, da $\begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix} = -4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

D $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ $\boxed{\text{Lineært afhængig}}$, da $\begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

E $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ $\boxed{\text{Lineært uafhængig}}$, da der <u>ikke</u> findes $k \in \mathbb{R}$ så $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Opgave 4

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \bar{b} = \begin{bmatrix} -8 \\ 16 \\ 4 \end{bmatrix}$

Skriv $\bar{b}$ som linear-kombination af $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$

~~(a)~~

Reducer totalmatrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & -8 \\ 1 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \underset{\sim}{r_2 \leftrightarrow r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 16 \\ 3 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{r_2 \to r_2 - 3r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & -8 & -12 & -56 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \underset{\sim}{r_2 \to \frac{-1}{8} r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{r_2 \to r_2 - \frac{3}{2} r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \underset{\sim}{r_1 \to r_1 - 4r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{r_1 \to r_1 - 2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Konklusion $\boxed{\bar{b} = -2\bar{a}_1 + 1\bar{a}_2 + 4\bar{a}_3}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$

Skriv $\bar{b}$ som linear-kombination af $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$

Reducer totalmatrix

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & 8 \end{bmatrix} \underset{\sim}{r_3 \to r_3 - 2r_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{r_3 \to r_3 + r_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{r_2 \to \frac{1}{2} r_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{r_1 \to r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{r_1 \to \frac{1}{2} r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 2 - 3x_3 \\ x_2 &= -2x_3 \\ x_3 &= x_3 \end{aligned}$$

~~$x_1 = 2 - 2 \cdot 3$~~

For $x_3 = -2$

$$x_1 = 2 - 3 \cdot (-2) = 8$$

$$x_2 = -2 \cdot (-2) = 4$$

$$x_3 = -2$$

Så $\boxed{\bar{b} = 8\bar{a}_1 + 4\bar{a}_2 - 2\bar{a}_3}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} h \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$

Find h så $\bar{b}$ er linearkombination af $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$

Reducer totalmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & h \\ 1 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \underset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & h \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\underset{r_3 \to \frac{1}{3} r_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & h \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \underset{r_2 \to r_2 - 2r_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & h-6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Systemet bliver kun konsistent hvis

$$h - 6 = 0 \iff \boxed{h = 6}$$

Opgave 5

Giv geometrisk fortolkning fra ref af matrix

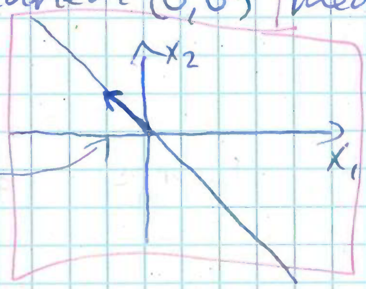
(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ oversættes til $x_1 + x_2 = 0$

x_2 fri

Parameterfremstilling er derfor

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dette er en linje gennem (0,0) med retningsvektor $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$



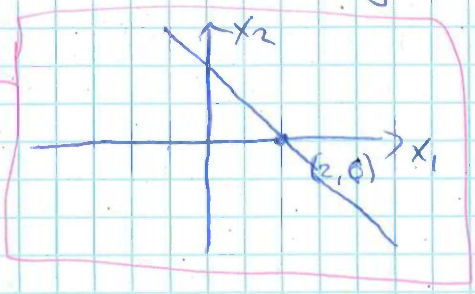
(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Oversæt $x_1 + x_2 = 2$

x_2 fri

Parameterfremstilling $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

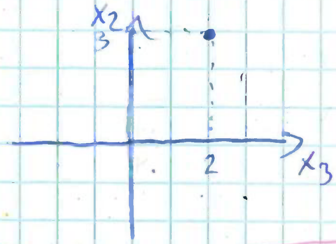
Linje gennem (2,0) med retningsvektor $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$



(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ oversæt $x_1 = 2$

$x_2 = 3$

punktet $(2, 3)$



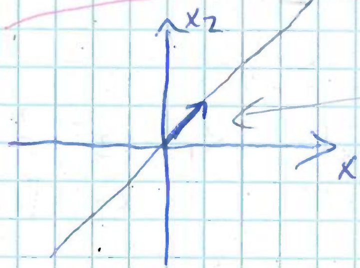
(d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ oversæt $x_1 - x_2 = 0$

x_2 fri

Parameterfremstilling

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Linje gennem $(0,0)$ med retningsvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



Opgave 6

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(a) Giv generel løsning

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 8 \end{array}\right] \underset{\substack{r_2 \to r_2 + 2r_1 \\ r_3 \to r_3 - r_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 10 \end{array}\right]$$

$$\underset{r_3 \leftrightarrow r_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{r_2 \to \frac{1}{2} r_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

RREF

Løsning

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 &= -2 \\ x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \end{aligned} \iff \begin{aligned} x_1 &= -2 - x_3 - x_4 \\ x_2 &= 5 - x_3 + x_4 \end{aligned}$$

$$x_3 = x_3$$

$$x_4 = x_4$$

Parameterfremstilling

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

(b) Løsning til $A\bar{x} = \bar{0}$ er denne del af løsningen til $A\bar{x} = \bar{b}$

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

(c) TRUE or FALSE

- $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ er en løsning til $A\bar{x} = \bar{b}$ fra (a)

$\boxed{\text{TRUE}}$ da man kan vælge $x_3 = 0$ og $x_4 = 0$

- $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ er en løsning til $A\bar{x} = \bar{0}$ fra (b)

$\boxed{\text{FALSE}}$

Tjek f.eks. resultatet af $A\bar{x}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= -2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ så ikke løsning

- $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ er løsning til $A\bar{x} = \bar{0}$ fra (b)

$\boxed{\text{TRUE}}$

Lav f.eks. samme udregning som ovenfor

Eller se at man kan vælge $x_3 = -4$ og $x_4 = 3$ i løsning for (b)

- $\begin{bmatrix} -1 \\ 12 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ er løsning til $A\bar{x} = \bar{b}$ fra (a)

$\boxed{\text{TRUE}}$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 12 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x_3 = -4$ $x_4 = 3$

én løsning til $A\bar{x} = \bar{0}$

én løsning til $A\bar{x} = \bar{b}$